OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA LOCALĂ, SUCEAVA, 14.02.2025

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a V-a

1. (7p) Calculează numărul $A = 2024 \cdot x + 52 \cdot y - z$, dacă:

$x = [(2^5)^2 + 2^5 + 1] : [(2^2)^5 + 2 \cdot 2^4 + 2^8 : 2^8]$

$2^2 \cdot [2^2 \cdot 3^2 \cdot (1 + 2^3 \cdot y) - 3^4] - 3^5 = 3^6$

$z = 110011_{(2)}$

Soluție:

$x = (2^{10} + 2^5 + 1) : (2^{10} + 2^5 + 1) = 1$

$4 \cdot [2^2 \cdot 3^2 \cdot (1 + 2^3 \cdot y) - 3^4] = 3^5 \cdot 4 /: 4 \Longrightarrow 2^2 \cdot 3^2 \cdot (1 + 2^3 \cdot y) - 3^4 = 3^5 \Longrightarrow$

$4 \cdot 3^2 \cdot (1 + 2^3 \cdot y) = 3^4 \cdot 4 /: (4 \cdot 3^2) \Longrightarrow 1 + 2^3 \cdot y = 9 \Longrightarrow 1 + 8y = 9 \Longrightarrow y = 1.$

$z = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 2 + 16 + 32 = 51.$

$A = 2024 \cdot 1 + 52 \cdot 1 - 51 = 2025.$

Barem:

$x = (2^{10} + 2^5 + 1) : (2^{10} + 2^5 + 1) = 1$	2p
$4 \cdot [2^2 \cdot 3^2 \cdot (1 + 2^3 \cdot y) - 3^4] = 3^5 \cdot 4 /: 4 \Longrightarrow 2^2 \cdot 3^2 \cdot (1 + 2^3 \cdot y) - 3^4 = 3^5 \Longrightarrow$ $4 \cdot 3^2 \cdot (1 + 2^3 \cdot y) = 3^4 \cdot 4 /: (4 \cdot 3^2) \Longrightarrow 1 + 2^3 \cdot y = 9 \Longrightarrow 1 + 8y = 9 \Longrightarrow y = 1.$	2p
$z = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 2 + 16 + 32 = 51$	2p
$A = 2024 \cdot 1 + 52 \cdot 1 - 51 = 2025.$	1p

2.

(2p) a) Scrie numărul *x* sub forma cea mai simplă, scoțând factor comun:

$x = 3^{333} - 2 \cdot 3^{332} - 2 \cdot 3^{331} - 3^{330}.$

(5p) b) Ordonează crescător numerele *x, y, z,* dacă:

$x = 3^{333} - 2 \cdot 3^{332} - 2 \cdot 3^{331} - 3^{330}$

$y = 2^{553} - 2^{552} - 2^{551}$

$z = 5^{222} + 7 \cdot 5^{220} - 6 \cdot 5^{221}.$

Soluție:

a) $x = 3^{330} \cdot (3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^1 - 1) = 3^{330} \cdot 2.$

b) $y = 2^{553} - 2^{552} - 2^{551} = 2^{551} \cdot (2^2 - 2 - 1) = 2^{551}.$

$z = 5^{220} \cdot (5^2 + 7 - 6 \cdot 5) = 5^{220} \cdot 2.$

$x = (3^3)^{110} \cdot 2 = 27^{110} \cdot 2$

$y = 2^{550} \cdot 2 = (2^5)^{110} \cdot 2 = 32^{110} \cdot 2$

$z = (5^2)^{110} \cdot 2 = 25^{110} \cdot 2.$

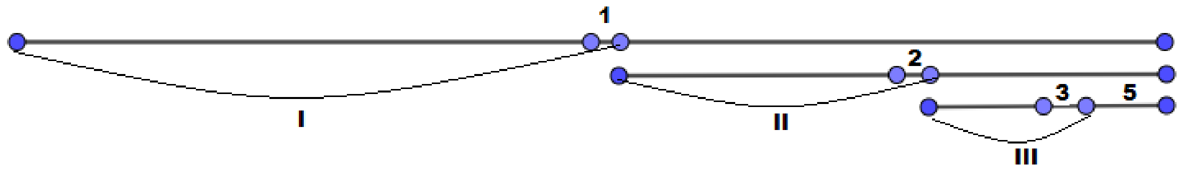
$25^{110} \cdot 2 < 27^{110} \cdot 2 < 32^{110} \cdot 2 \Longrightarrow z < x < y$. Ordinea crescătoare: z, x, y.

Barem:

a)	$x = 3^{330} \cdot (3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^1 - 1) = 3^{330} \cdot 2$	2p
b)	$y = 2^{553} - 2^{552} - 2^{551} = 2^{551} \cdot (2^2 - 2 - 1) = 2^{551}$	1p
	$z = 5^{220} \cdot (5^2 + 7 - 6 \cdot 5) = 5^{220} \cdot 2$	1p
	$x = (3^3)^{110} \cdot 2 = 27^{110} \cdot 2$ $y = 2^{550} \cdot 2 = (2^5)^{110} \cdot 2 = 32^{110} \cdot 2$ $z = (5^2)^{110} \cdot 2 = 25^{110} \cdot 2$	2p
	$25^{110} \cdot 2 < 27^{110} \cdot 2 < 32^{110} \cdot 2 \Longrightarrow z < x < y$. Ordinea crescătoare: z, x, y.	1p

3. (7p) Flămânzilă mănâncă într-o zi, dintr-o grămadă de pepeni, jumătate din ei și încă un pepene, a doua zi mănâncă jumătate din rest și încă doi pepeni, iar în a treia zi mănâncă jumătate din noul rest și încă trei pepeni. Câți pepeni au fost la început în grămadă și câți pepeni a mâncat Flămânzilă în fiecare zi, dacă au mai rămas din grămadă 5 pepeni?

Soluție:



Jumătate din al doilea rest reprezintă $3 + 5 = 8$ pepeni.

Al doilea rest este egal cu $8 \cdot 2 = 16$ pepeni.

Jumătate din primul rest reprezintă $16 + 2 = 18$ pepeni.

Primul rest este egal cu $18 \cdot 2 = 36$ pepeni.

Jumătate din numărul pepenilor din grămadă este egal cu $36 + 1 = 37$ pepeni.

Numărul total de pepeni este egal cu $37 \cdot 2 = 74$.

În prima zi mănâncă $37 + 1 = 38$ pepeni.

A doua zi mănâncă $(74 - 38): 2 + 2 = 20$ pepeni.

A treia zi mănâncă $(74 - 38 - 20): 2 + 3 = 11$ pepeni.

Barem:

Jumătate din al doilea rest reprezintă $3 + 5 = 8$ pepeni. Al doilea rest este egal cu $8 \cdot 2 = 16$ pepeni.	1p
Jumătate din primul rest reprezintă $16 + 2 = 18$ pepeni. Primul rest este egal cu $18 \cdot 2 = 36$ pepeni.	2p
Jumătate din numărul pepenilor din grămadă este egal cu $36 + 1 = 37$ pepeni. Numărul total de pepeni este egal cu $37 \cdot 2 = 74$.	2p
În prima zi mănâncă $37 + 1 = 38$ pepeni. A doua zi mănâncă $(74 - 38): 2 + 2 = 20$ pepeni. A treia zi mănâncă $(74 - 38 - 20): 2 + 3 = 11$ pepeni.	2p

4. Se consideră șirul de numere naturale: 1, 5, 9, 13, 17, …

(1p) a) Completează șirul cu încă patru termeni.

(3p) b) Află dacă al 507-lea termen din șir este divizibil cu 45.

(3p) c) Calculează suma primilor 100 de termeni ai șirului.

Soluție:

a) 21, 25, 29, 33

b) $t_1 = 4 \cdot 0 + 1,\ t_2 = 4 \cdot 1 + 1,\ t_3 = 4 \cdot 2 + 1, \ldots, t_{507} = 4 \cdot 506 + 1 = 2025.$

$2025: 45 = 45 \Rightarrow 2025 \vdots 45.$

c) $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{100} = (4 \cdot 0 + 1) + (4 \cdot 1 + 1) + (4 \cdot 2 + 1) + \cdots + (4 \cdot 99 + 1) =$

$4 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 99) + \underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}_{100\ termeni} = 4 \cdot 99 \cdot 100: 2 + 100 = 19900.$

Barem:

a)	21, 25, 29, 33	1p
b)	$t_1 = 4 \cdot 0 + 1,\ t_2 = 4 \cdot 1 + 1,\ t_3 = 4 \cdot 2 + 1, \ldots, t_{507} = 4 \cdot 506 + 1 = 2025.$	2p
	$2025: 45 = 45 \Rightarrow 2025 \vdots 45.$	1p
c)	$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{100} = (4 \cdot 0 + 1) + (4 \cdot 1 + 1) + (4 \cdot 2 + 1) + \cdots +$ $(4 \cdot 99 + 1) =$	1p
	$4 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 99) + \underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}_{100\ termeni} = 4 \cdot 99 \cdot 100: 2 + 100 =$ $19900.$	2p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**