OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA LOCALĂ, SUCEAVA, 14.02.2025

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VI-a

1. **a) (3p)** Determinați elementele mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,/\, \frac{15}{2x-1} \in \mathbb{N}\right\}$.

   b) (4p) După o reducere de preț cu 20% un ghiozdan costă 192 lei. Aflați cât ar costa acel ghiozdan dacă s-ar fi scumpit, înainte de reducere, cu 20%, apoi cu 10 lei.

Soluție orientativă

a) $\frac{15}{2x-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2x-1/15 \Leftrightarrow 2x-1 \in D_{15} \Leftrightarrow 2x \in \{2;4;6;116\} \Leftrightarrow x \in \{1;2;3;8\}, atunci$ $A = \{1;2;3;8\}$

b) Notăm cu x prețul inițial al ghiozdanului

$$x - \frac{20}{100} \cdot x = 192 \Leftrightarrow 10x - 2x = 1920 \Leftrightarrow 8x = 1920 \Leftrightarrow x = 240\ lei.$$

$$240 + \frac{20}{100} \cdot 240 = 288\ lei.$$

Prețul final $= 288 + 10 = 298\ lei$

Barem

a) $\frac{15}{2x-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2x-1/15 \Leftrightarrow 2x-1 \in D_{15}$	2p
$2\,x \in \{2;4;6;116\} \Leftrightarrow x \in \{1;2;3;8\}, atunci\ A = \{1;2;3;8\}$	1p
b) Notăm cu x prețul inițial al ghiozdanului $x - \frac{20}{100} \cdot x = 192$	1p
$10x - 2x = 1920 \Leftrightarrow 8x = 1920 \Leftrightarrow x = 240\ lei$	1p
$240 + \frac{20}{100} \cdot 240 = 288\ lei,$	1p
$Prețul\ final = 288 + 10 = 298\ lei$	1p

2. La o competiție sportivă sunt așteptați cel mult 200 de copii. Dacă se grupează în coloane de câte 4, 5 sau 6 copii, rămân separat doi copii. Dacă se așeză câte 7 nu rămâne nici un copil.

   a) (2p) Verificați dacă la competiție pot participa 122 de copii.

   b) (5p) Determinați numărul de participanți la competiție.

Soluție orientativă

a) $122:4 = 30, r = 2;\ 122:5 = 24, r = 2;\ 122:6 = 20, r = 2$, dar $122:7 = 17, r = 3$, cum $3 \neq 0$,

b) Notăm cu n numărul de participanți, $n \in \mathbb{N}$ $și$ $n < 200$

Din teorema împărțirii cu rest avem: $n = 4 \cdot c_1 + 2,\ n = 5 \cdot c_2 + 2,\ n = 6 \cdot c_3 + 2,$

$n = 7 \cdot c_4 \Longrightarrow n \vdots 7.$

$n - 2 \in M_{[4,5,6]} \Leftrightarrow\ n - 2 \in M_{60} \Leftrightarrow\ n - 2 = 60 \cdot k, unde\ k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n = 60 \cdot k + 2$

Pentru $k = 1 \Longrightarrow n = 62,\ dar\ 62\ \ nu\ convine,\ \ deoarece\ \ nu\ se\ divide\ la\ 7.$

Pentru $k = 2 \Longrightarrow n = 122,\ dar\ 122\ nu\ convine,\ \ deoarece\ \ nu\ se\ divide\ la\ 7.$

Pentru $k = 3 \Longrightarrow n = 182,\ iar\ 182\ \vdots\ 7\ deci\ convine.$

Barem

$a)$ $122{:}\,4 = 30, r = 2;\ 122{:}\,5 = 24, r = 2;\ 122{:}\,6 = 20, r = 2$, dar $122{:}\,7 = 17, r = 3$,	1p
cum $3 \neq 0, atunci\ la\ competiție\ nu\ pot\ participa\ 122\ elevi.$	1p
b) Notăm cu n numărul de participanți, $n \in \mathbb{N}$ $și$ $n < 200$ Din teorema împărțirii cu rest avem: $n = 4 \cdot c_1 + 2,\ n = 5 \cdot c_2 + 2,\ n = 6 \cdot c_3 + 2,$ $n = 7 \cdot c_4 \Longrightarrow n \vdots 7.$	2p
$n - 2 \in M_{[4,5,6]} \Leftrightarrow\ n - 2 \in M_{60} \Leftrightarrow\ n - 2 = 60 \cdot k, unde\ k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n = 60 \cdot k + 2$	1p
Pentru $k = 1 \Longrightarrow n = 62, dar\ 62\ \ nu\ convine,\ deoarece\ nu\ se\ divide\ la\ 7.$ Pentru $k = 2 \Longrightarrow n = 122, dar\ 122\ nu\ convine, deoarece\ nu\ se\ divide\ la\ 7.$ Pentru $k = 3 \Longrightarrow n = 182,\ iar\ 182\ \vdots\ 7\ deci\ convine.$	2p

3. Se consideră $\sphericalangle AOD$ alungit și semidreptele OB și OC situate în același semiplan, astfel încât măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ să fie direct proporționale cu numerele 3, 4, respectiv 8. Fie semidreapta OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ și $OM \perp OP$, astfel încât semidreptele $OM\ și\ OP$ să fie situate în semiplane diferite, față de dreapta AD.

a) (3p) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD.$

b) (2p) Arătați că $2 \cdot \sphericalangle\ AOM = \sphericalangle MOD.$

c) (2p) Arătați că $\sphericalangle POD \equiv \sphericalangle MOD.$

Soluție orientativă

a) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC +\ \sphericalangle COD = 180°,\ \ \frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{4} = \frac{\sphericalangle COD}{8} = k,$ atunci $\sphericalangle AOB = 3k,\ \sphericalangle BOC = 4k,\ \ \sphericalangle COD = 8k,\ 3k + 4k + 8k = 180° \Leftrightarrow k = 12°.$

Finalizare: $\sphericalangle AOB = 36°,\ \sphericalangle BOC = 48°,\ \sphericalangle COD = 96°.$

b) OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC\ \Longrightarrow \sphericalangle BOM = \sphericalangle MOC = 24°$

$\sphericalangle MOD = \sphericalangle MOC + \sphericalangle COD = 24° + 96° = 120°.$ $\sphericalangle MOA = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOM = 36° + 24° = 60° \Longrightarrow 2 \cdot \sphericalangle AOM = \sphericalangle MOD$

c) $OM \perp OP \Longrightarrow \sphericalangle MOP = 90°$ și $\sphericalangle MOA = 60° \Longrightarrow \sphericalangle AOP = 30°$,

$\sphericalangle POD = \sphericalangle AOD - \sphericalangle DOP = 120°$, iar $\sphericalangle MOD = 120°$, atunci $\sphericalangle POD \equiv \sphericalangle MOD$.

Barem

$a)$ $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 180°$, $\frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{4} = \frac{\sphericalangle COD}{8} = k$, atunci $\sphericalangle AOB = 3k$, $\sphericalangle BOC = 4k$, $\sphericalangle COD = 8k$, $3k + 4k + 8k = 180° \Leftrightarrow k = 12°$.	2p
Finalizare: $\sphericalangle AOB = 36°$, $\sphericalangle BOC = 48°$, $\sphericalangle COD = 96°$.	1p
b) OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC \Longrightarrow \sphericalangle BOM = \sphericalangle MOC = 24°$ $\sphericalangle MOD = \sphericalangle MOC + \sphericalangle COD = 24° + 96° = 120°$.	1p
$\sphericalangle MOA = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOM = 36° + 24° = 60° \Longrightarrow 2 \cdot \sphericalangle AOM = \sphericalangle MOD$	1p
c) $OM \perp OP \Longrightarrow \sphericalangle MOP = 90°$ și $\sphericalangle MOA = 60° \Longrightarrow \sphericalangle AOP = 30°$	1p
$\sphericalangle POD = \sphericalangle AOD - \sphericalangle DOP = 120°$, iar $\sphericalangle MOD = 120°$, atunci $\sphericalangle POD \equiv \sphericalangle MOD$.	1p

4. Pe dreapta d se consideră punctele M, A_1, A_2, $A_3, \dots\dots A_{100}$, astfel încât $MA_1 = 1\ cm$, $A_1A_2 = 3\ cm$, $A_2A_3 = 5\ cm$, $A_3A_4 = 7\ cm, \dots\dots\dots$, $A_{99}A_{100} = 199\ cm$. Să se afle:

a) **(3p)** distanța dintre mijloacele segmentelor A_1A_2 și A_5A_6.

b) **(4p)** lungimea segmentului $A_{50}A_{100}$.

Soluție orientativă

a) Fie P mijlocul segmentului $A_1A_2 \Longrightarrow A_1P = PA_2 = \frac{A_1A_2}{2} = 1{,}5\ cm.$

Fie Q mijlocul segmentului $A_5A_6 \Longrightarrow A_5Q = QA_6 = \frac{A_5A_6}{2} = 5{,}5\ cm.$

$$PA_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5Q = 1{,}5 + 5 + 7 + 9 + 5{,}5 = 28\ cm$$

b) Lungime segmentului $A_{50}A_{51} = 101\ cm.$

$A_{50}A_{100} = (2 \cdot 51 - 1) + (2 \cdot 52 - 1) + \cdots \dots\dots + (2 \cdot 100 - 1)$

Finalizare $A_{50}A_{100} = 7500\ cm$

Barem

a) Fie P mijlocul segmentului $A_1A_2 \Longrightarrow A_1P = PA_2 = \frac{A_1A_2}{2} = 1{,}5\ cm.$ Fie Q mijlocul segmentului $A_5A_6 \Longrightarrow A_5Q = QA_6 = \frac{A_5A_6}{2} = 5{,}5\ cm.$	**1p**
$PA_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5Q = 1{,}5 + 5 + 7 + 9 + 5{,}5 = 28\ cm$	**2p**
a) Lungime segmentului $A_{50}A_{51} = 101\ cm.$	**1p**

$A_{50}A_{100} = (2 \cdot 51 - 1) + (2 \cdot 52 - 1) + \cdots \ldots \ldots .. + (2 \cdot 100 - 1)$	**1p**
Finalizare $A_{50}A_{100} = 7500\ cm$	**2p**

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**