

OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
ETAPA LOCALĂ, SUCEAVA, 14.02.2025
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1) 4p. a) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor:

$$a = \sqrt{6} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{27} \quad \text{și} \quad b = \sqrt{24} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (\sqrt{8} - \sqrt{12}) .$$

3p. b) Să se arate că numărul

$$a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{10}}}{33 + 11\sqrt{3}} , \text{ este un număr natural.}$$

Soluție: a)

$$a = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{2} \dots \dots \dots 1p$$

$$b = \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} - \sqrt{8} + \sqrt{12} = 2\sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{8} + \sqrt{12} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \dots \dots \dots 1p$$

$$m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \dots \dots \dots 1p$$

$$m_g = \sqrt{ab} = \sqrt{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4 \dots \dots \dots 1p$$

b)

$$a = \frac{\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + 9 + 9\sqrt{3} + 27 + 27\sqrt{3} + 81 + 81\sqrt{3} + 243}{33 + 11\sqrt{3}} = \dots \dots \dots 1p$$

$$= \frac{121\sqrt{3} + 363}{33 + 11\sqrt{3}} = \dots \dots \dots 1p$$

$$= \frac{11(33 + 11\sqrt{3})}{33 + 11\sqrt{3}} = 11 \in \mathbb{N} \dots \dots \dots 1p$$

2) Se dă mulțimea:

$$A = \{ \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{100} \}$$

3p. a) Calculați suma numerelor naturale din mulțimea A.

4p. b) Arătați că produsul elementelor mulțimii A este un număr irațional.

Prof. Solcanu Vasile

Soluție: a)

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow n = a^2, a \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$$

Pătratele perfecte de sub radicalii din A sunt:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 81, 100 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \dots\dots\dots \sqrt{100} = 10 \dots\dots\dots 1p$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 \dots\dots\dots 1p$$

b)

$$\text{Fie } n = \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \dots\dots\dots \cdot \sqrt{100} = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots\dots\dots \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \dots\dots\dots 1p$$

Presupunem că n nu este irațional

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} n \in \mathbb{Q} \\ m \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots\dots\dots \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \text{ este pătrat perfect} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar, } \left. \begin{array}{l} m:97 \\ m - \text{prim} \\ m \nmid 97^2 \end{array} \right\} \Rightarrow m \text{ nu este pătrat perfect} \dots\dots\dots 1p$$

Deci, n nu este rațional, el este irațional1p

3) Se dă patrulaterul convex ABCD în care măsurile unghiurilor B, C și D sunt direct proporționale cu numerele 3; 4 și 8, iar măsurile unghiurilor D și A sunt invers proporționale cu numerele 0,125 și 0,(1).

4p. a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului ABCD.

3p. b) Arătați că patrulaterul ABCD este un trapez.

Prof. Solcanu Vasile

Soluție: a)

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sphericalangle B}{3} = \frac{\sphericalangle C}{4} = \frac{\sphericalangle D}{8} \\ 0,125 \cdot \sphericalangle D = 0,(1) \cdot \sphericalangle A \Rightarrow \frac{\sphericalangle D}{8} = \frac{\sphericalangle A}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sphericalangle A}{9} = \frac{\sphericalangle B}{3} = \frac{\sphericalangle C}{4} = \frac{\sphericalangle D}{8} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D}{9 + 3 + 4 + 8} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = 9 \cdot 15^\circ = 135^\circ \\ \angle B = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ \\ \angle C = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ \\ \angle D = 8 \cdot 15^\circ = 120^\circ \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1p$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ \\ AB - \text{secanta} \end{array} \right\} \Rightarrow AD \parallel BC \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B + \angle C = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ \neq 180^\circ \\ BC - \text{secanta} \end{array} \right\} \Rightarrow AB \nparallel CD \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow ABCD - \text{trapez} \dots\dots\dots 1p$$

4) Se dă triunghiul dreptunghic ABC, în care $\angle A = 90^\circ$ și $\angle C = 30^\circ$. Dacă, M este mijlocul laturii BC, BN este bisectoarea unghiului B, $N \in AC$, P este mijlocul segmentului BN,

4p. a) demonstrați că patrulaterul APMN este romb,

3p. b) demonstrați că aria triunghiului ABC este de șase ori mai mare decât aria triunghiului APB.

Prof. Solcanu Vasile

Soluție: a)

$$BN - \text{bi sec toare} \Rightarrow \angle ABN = \angle NBC = 30^\circ = \angle NCB \Rightarrow \triangle NBC - \text{isoscel} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle NBC - \text{isoscel} \\ NM - \text{mediana} \end{array} \right\} \Rightarrow NM \perp BC \Rightarrow \triangle NMB - \text{dreptunghic} \Rightarrow MN = MP = \frac{BN}{2}$$

$$(\text{deoarece: } \angle NBM = 30^\circ; PM - \text{mediana}) \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BAN - \text{dreptunghic} \\ AP - \text{mediana} \\ \angle ABN = 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow AP = AN = \frac{BN}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din tranzitivitate } AP = PM = MN = NA \left(= \frac{BN}{2} \right) \Rightarrow APMN - \text{romb} \dots\dots\dots 1p$$

b)

$$AP - \text{mediana} \Rightarrow S = A_{\triangle APB} = A_{\triangle APN} = \frac{A_{\triangle BAN}}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\triangle CMN \equiv \triangle BMN \equiv \triangle BAN (\text{cazul : IU}) \Rightarrow A_{\triangle CMN} = A_{\triangle BMN} = A_{\triangle BAN} = 2S \dots\dots\dots 1p$$

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta CMN} + A_{\Delta BMN} + A_{\Delta BAN} = 2S + 2S + 2S = 6S = 6 \cdot A_{\Delta APB} \dots\dots\dots 1p.$$

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.